Acciones de grupos sobre espacios topológicos

Santiago Biec Amigo

Trabajo académicamente dirigido por Elena Martín Peinador

Introducción

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. El primero introduce las acciones de grupo presentando los elementos básicos, algunos resultados inmediatos y un par de teoremas clásicos, el teorema de Cayley y el de recurrencia de Poincaré. El segundo capítulo sigue tratando las acciones, ahora dotadas de topología y se pasa a estudiar las órbitas de dichas acciones. El capítulo concluye con otro teorema de recurrencia que se apoya en la compacidad del espacio. El cuarto versa sobre el grupo de los homeomorfismos $H(X)$ de un espacio topológico localmente compacto X. Claramente $H(X)$ es un grupo respecto la composición de aplicaciones. En $H(X)$ hemos considerado una topología de grupo τ_g, introducida por Arens bajo el nombre de g-topología, que hace continua la acción natural $H(X) \times X \to X$, es decir, es admisible y por ello más fina que la compacto-abierta.

La topología compacto-abierta en $H(X)$ en general no hace continua la inversión $f \mapsto f^{-1}$, y en consecuencia no es topología de grupo. Si X es compacto y T_2 la topología descrita τ_g coincide con la compacto-abierta. En el caso más general de X localmente compacto y T_2, τ_g es la topología menos fina en $H(X)$ de todas aquellas que cumplen las dos condiciones: ser topología de grupo y ser admisible.

1. Nociones básicas de acciones

Definición 1.1. *Sea X un conjunto, G un grupo, diremos que una aplicación $\theta : G \times X \to X$ es una acción de G sobre X si cumple los siguientes axiomas:*

1) $\theta(x, e) = x$, $\forall x \in X$ siendo e el elemento neutro de G.

2) $\theta(g, \theta(h, x))) = \theta(g \cdot h, x)$ para todo $x \in X$ $g, h \in G$, siendo $\cdot$ la operación de G.

A partir de ahora vamos a denotar $g \cdot h$ como gh y $\theta(g, x)$ como gx, de forma que los axiomas quedarían:

1) $ex = x$ $\forall x \in X$.

2) $h(gx) = (hg)x$ para todo $x \in X$ $g, h \in G$.

Ejemplo 1.1. *Sea $\theta : (\mathbb{R}, +) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\theta(t, (x, y)) = (x + t, y)$. θ es una acción de $(\mathbb{R}, +)$ sobre $\mathbb{R}^2$: $(x+0, y) = (x, y)$ y $\theta(t_1, (t_2+x, y)) = \theta(t_1+t_2+x, y)$*

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Sea θ una acción de G sobre un conjunto X, llamamos transiciones a las funciones $\theta_g : X \to X$ con $\theta_g(x) = gx$ siendo g un elemento de G.
Los axiomas de las acciones nos dicen que: $\theta_e = Id_X$ y que $\theta_{gh} = \theta_g \cdot \theta_h$. Por lo tanto toda transición θ_g tiene una inversa $\theta_{g^{-1}}$ y así las transiciones son elementos de $Biyec(X, X)$.

Sea ahora, la función $\Theta : G \to Biyec(X, X)$, tal que $\Theta(g) = \theta_g$, por lo que hemos visto antes, está bien definida. Ahora veremos que es un homomorfismo considerando la aplicación composicion en $Biyec(X, X) : \Theta(gh) = \theta_{gh} = \theta_g \circ \theta_h = \Theta(g) \circ \Theta(h)\ g, h \in G$

Por esta razón a la terna (G, X, θ) se le denomina grupo de transformaciones.

Definición 1.2. *Para un grupo de transformaciones* (G, X, θ) *usaremos los siguientes términos:*

- ⋆ $HA = \{ha,\ h \in H \text{ y } a \in A\}$
- ⋆ A es un conjunto invariante en X si $GA = A$
- ⋆ $Gx = gx, g \in G$ es la órbita de x
- ⋆ El conjunto de órbitas se denota X/G
- ⋆ La proyección orbital se define como $\pi : X \to X/G$, donde $\pi(x) = Gx \in X/G$
- ⋆ $G_A = g \in G : gA = A$ es el estabilizador de A.
- ⋆ $G_x = g \in G : gx = x$ es grupo de isotropía de x.
- ⋆ x es un punto fijo si $G_x = G$
- ⋆ X^G es el conjunto de puntos fijos.

Proposición 1.1. $A \subseteq X$ *es invariante sii* $gA \subseteq A\ \forall g \in G$

Demostración. La primera implicación es evidente. Para ver la segunda es suficiente ver que $gA \supseteq A\ \forall g \in G$. Aplicamos g^{-1} a ambos lados, obteniendo: $g^{-1}gA = A \subseteq g^{-1}A\ \forall g \in G$; como estamos en un grupo, todo elemento g tiene un inverso dentro del grupo, luego es equivalente a decir: $A \subseteq gA\ \forall g \in G$ □

Proposición 1.2. *Dos órbitas o son iguales o disjuntas.*

Demostración. Sean Gx_1 y Gx_2 dos órbitas tales que $Gx_1 \cap Gx_2 \neq \emptyset$ y veremos que tienen que ser iguales. Hemos dicho que existen $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_1 x_1 = g_2 x_2$, por tanto $x_1 = g_1^{-1} g_2 x_2$ y de aquí $x_1 \in Gx_2$ de forma simétrica obtendríamos $x_2 \in Gx_1$ y así la igualdad buscada. $\square$

En virtud de lo anterior hemos visto que las órbitas de un conjunto lo particionan. De hecho podríamos definir la clase de equivalencia: $x \sim y$ si existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Las clases de equivalencia serán los puntos, X/G el espacio cociente y π la proyección natural.

Proposición 1.3. *Para cualquier subconjunto $\emptyset \neq A \subseteq X$, G_A tiene estructura de grupo.*

Demostración. Tenemos que ver que el producto de elementos y la inversión son operaciones cerradas en G_A. Sean $g_1, g_2 \in G$, $g_1(g_2 A) = g_1 A = A$. Si $g \in G$, $gA = A$ luego $A = g^{-1}A$ y por tanto $g^{-1} \in G_A$ $\square$

En el ejemplo 1.1, si tomamos un punto (x_0, y_0), su órbita $\mathbb{R}(x_0, y_0)$ será la recta horizontal de altura y_0. Y por tanto la podríamos identificar con el valor y_0, quedando entonces $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ identificado con $\mathbb{R}$.

Proposición 1.4. *El homomorfismo $\Theta : G \to Biy(X)$ inducido por la acción θ tiene como núcleo $ker\Theta = \bigcap_{x \in X} G_x$.*

Demostración. $g \in ker\Theta$ sii $\Theta(g) = \theta_g = Id_X$, es decir, $gx = x$ para todo $x \in X$, lo que equivale a $g \in G_x$ para todo $x \in X$. $\square$

Definición 1.3. *Se dice que una acción de G en X es:*
trivial: si $G_x = G$ para todo $x \in X$.
libre: si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$.
efectiva: si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$.
transitiva: si tiene una única órbita.

Observación 1.1. *La acción del ejemplo es libre.*
Toda acción libre es efectiva.
Ser efectiva es equivalente a que el homomorfismo Θ sea inyectivo.

Una acción es transitiva si para cualquier par $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Ejemplo 1.2. *Para un grupo cualquiera G, sea la acción $\mu : G \times G \to G$, $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$. Trivialmente es una acción transitiva, libre y por tanto efectiva. Luego $\Theta : G \to Biy(G)$ es un monomorfismo, habiendo demostrado así que todo grupo es isomorfo a un subgrupo de su grupo de permutaciones ($Teorema\ de\ Caley$).*

Definición 1.4. *Sea $(X, \mathcal{M}, m)$ un espacio de medida. Diremos que $f : X \to X$ conserva la medida si para todo $A \in \mathcal{M}$, $f^{-1}(A)$ también es medible y tiene la misma medida que A.*

Si a un espacio medible le aplicásemos una y otra vez una función que conserva la medida, a priori diríamos que cada punto trazará una ruta caótica. Los siguientes resultados garantizan cierta periocidad si el espacio es de medida finita y la función es invariante.

Teorema 1.1. *(de recurrencia de Poincaré)*
Sea $(X, \mathcal{M}, m)$ un espacio de medida finita. Si $f : X \to X$ conserva la medida entonces para todo $A \in \mathcal{M}$ con $m(A) > 0$, el conjunto de puntos $x \in A$ tal que $f^k(x) \notin A$ para todo k a partir de cierto n , tiene medida nula.

Demostración. Sea $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} f^{-k}A$. Claramente A $\subseteq A_0$, y $A_i \subseteq A_j$ siempre que $j \leq i$. Dado que A_i=$f^{j-i}A_j$, se cumple que $m(A_i) = m(A_j)$ para todo $i, j \geq 0$. Para cualquier $n > 0$, tenemos que $A - A_n \subseteq A_0 - A_n$, por tanto:

$$m(A - A_n) \leq m(A_0 - A_n) = m(A_0) - m(A_n) = 0$$

De aquí $m(A - A_n) = 0$ para todo $n > 0$, por tanto $m(A - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A - A_n)) = 0$ y conluimos con que $m(A - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ siendo este precisamente el conjunto de los $x \in A$ tal que para algún n y para todos los $k > n$ se tiene $f^k(x) \notin A$. $\square$

Ahora veremos otro resultado, más topológico que el anterior (en lo siguiente X es un espacio topológico), pero antes necesitamos una definición:

Definición 1.5. *Dada una función f: $X \to X$, decimos que $x_0 \in X$ es un punto recurrente si para cualquier entorno abierto de x_0, U^{x_0} se tiene que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_0$ tal que $f^n(x) \in U^{x_0}$.*

Teorema 1.2. *Sea $(X, \mathcal{M}, m)$ un espacio de medida finito tal que los borelianos están contenidos en $\mathcal{M}$ y X verifica el segundo axioma de numerabilidad y es Hausdorff. Entonces dada una función f que conserve la medida, casi todo punto es recurrente.*

Demostración. Por ser X segundo axioma de numerabilidad exite una base numerable$\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ que genera la topología. Sea

$$U'_n = \{x \in U_n : \forall m \geqslant 1, f^m(x) \notin U_n\}$$

Por el teorema anterior sabemos que $m(U'_n) = 0$. Sea $\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n$. Entonces $m(\mathcal{N}) = 0$ y habremos acabado si vemos que si $x \in X - \mathcal{N}$ entonces es recurrente. Dado U^x entorno de x, existe U_n tal que $x \subseteq U_n \subseteq U^x$, y como $x \notin \mathcal{N}$ tenemos que $x \in U_n - U'_n$. Por definición de U'_n tenemos que existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in U_n \subseteq U^x$. Por tanto es recurrente.

□

2. Acciones continuas y espacios de órbitas

A partir de ahora consideraremos acciones sobre espacios topológicos a las que se le exigirá un axioma más:

$\theta_g : (X, \tau) \to (X, \tau)$ es una función continua para todo $g \in G$.

Recordemos que $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$ luego θ_g va a ser un homeomorfismo. Por tanto ahora el homomorfismo inducido Θ tiene como conjunto de llegada $Homeo(X)$

Si $E \subset X$ es abierto o cerrado, entonces gE también lo será. De hecho $GE = \bigcup_{g \in G} gE$ será abierto o cerrado en el caso de G finito.

Si la acción es transitiva, por definición, para todo par $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$ que equivale a $\theta_g(x) = y$, es decir, que hay un homeomorfismo que lleva x a y; siendo esto la definición de que X es homogéneo.

Al espacio de órbitas X/G le daremos la topología cociente respecto a la proyección orbital $\pi : X \to X/G$, $\pi(x) = Gx$.

Proposición 2.1. *La proyección orbital es abierta y si G es finito también es cerrada.*

Demostración. Sea $E \subset X$ abierto, nos preguntamos si $\pi(E)$ es abierto. Por la definición de topología cociente significa que $\pi^{-1}(\pi(E))$ sea abierto en X. $\pi^{-1}(\pi(E)) = \pi^{-1}(\bigcup_{e\in E}(Ge)) = GE$ que como hemos comentado anteriormente es abierto, y si E es cerrado y G finito entonces es cerrado.

$\square$

Proposición 2.2. *(1)Si X es conexo, localmente conexo, compacto o localmente compacto también lo es X/G respectivamente.*
(2) Si X es I o II numerable entonces X/G también lo es respectivamente.
(3) Cuando G es finito, si X es T_1, T_2, regular o normal, entonces también lo es X/G respectivamente.

Demostración. (1)Es trivial puesto que la proyección orbital es abierta.
(2)Se demuestra de forma usual que si $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ es base de X entonces $\mathcal{B}' = \{f(B_i) : i \in I\}$ es base de $f(X)$ siendo f abierta, continua y sobreyectiva.
(3)T_1 es trivial si usamos la caracterización que dice que un espacio es T_1 si y solo si sus conjuntos unipuntuales son cerrados. El resto de la demostración la haremos en paralelo: tomemos P y Q dos conjuntos disjuntos de X/G que son, o dos puntos o un punto y un cerrado o dos cerrados. Entonces $\pi^{-1}(P)$ y $\pi^{-1}(Q)$ van a ser un conjunto finito o un cerrado, por la hipótesis estos conjuntos tendrán entornos abiertos disjuntos, llamemos U a la de $\pi^{-1}(P)$ que cumplirá $\pi^{-1}(Q) \cap \overline{U} = \emptyset$. De lo que se deduce que $Q \cap \pi(\overline{U}) = \emptyset$ y ya hemos encontrado los dos entornos disjuntos,$\pi(U)$ y $X/G - \pi(\overline{U})$ de P y Q respectivamente. $\square$

Enunciaré una proposición cuya demostración es directa pero laboriosa.

Proposición 2.3. *Si G_i actúa en un espacio X_i, para $i = 1, 2$ entonces el grupo $G_1 \times G_2$ actúa en el espacio producto $X_1 \times X_2$ y*

$$(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \approx (X_1/G_1) \times (X_2/G_2).$$

Ejemplo 2.1. *Nos planteamos averiguar el espacio orbital de la siguiente acción: $\theta : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(m, n) \cdot (x, y) = (m + x, n + y)$. Por la proposición anterior podemos primero calcular el espacio orbital de $\mu : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $n \cdot x = n + x$ el cual es $\mathbb{R}$ con la relación $x \backsim y$ sii $y - x \in \mathbb{Z}$. Es de dominio general que ese espacio es S^1, por tanto gracias a nuestra proposición sabemos que el espacio orbital de θ es el toro, $S^1 \times S^1$.Se podría haber comprobado sin necesidad de ningún resultado.*

Ahora veremos un ejemplo en el que dos acciones con el mismo grupo y conjunto soporte tienen espacios orbitales distintos.

Ejemplo 2.2. *Sea* $G = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ *y* $X = S^1$*. Sea* $\theta_1(1,x) = -x$*, entonces el espacio orbital será homeomorfo otra vez a* S^1*, que de hecho es la definición del 1-espacio proyectivo; y si tomamos* $\theta_2(1,x) = \overline{x}$ *el espacio de órbitas es homeomorfo al intervalo* $[0,1]$*.*

Ejemplo 2.3. *Sea* $\theta : \mathbb{Z}_2 \times (S^1 \times S^1) \to S^1$ *con* $\theta(1,(x,y)) = (-x,\overline{y})$*. En esta acción relacionamos los pares* (z_1,z_2) *con* $(-z_1,\overline{z_2})$*. En cambio en la acción* $\mu : (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times (S^1 \times S^1) \to S^1 \times S^1$ *definida como:* $(1,0)\cdot(x,y) = (-x,y)$, $(0,1)\cdot(x,y) = (x,\overline{y})$, $(1,1)\cdot(x,y) = (-x,\overline{y})$; *relaciona los pares* (z_1,z_2),$(-z_1,z_2)$,$(z_1,\overline{z_2})$,$(-z_1,\overline{z_2})$*. El espacio de órbitas de esta última acción gracias a la proposición 2.3 y al ejemplo anterior es* $[0,1]\times S^1$*, es decir el cilindro acotado. Ahora veremos que pasa para la acción* θ*. El conjunto es el toro, que lo consideramos como el espacio cociente del cuadrado* $[-1,1]\times[-1,1]$ *respecto a la función* $p(s,t) = (e^{\pi is}, e^{\pi it})$*. Si le aplicamos la acción obtenemos* $gp(s,t) = g(e^{\pi is}, e^{\pi it}) = (-e^{\pi is}, \overline{e^{\pi it}}) = (e^{\pi i(s\pm1)}, e^{-\pi it}) = p(s\pm1,-t)$*, donde el signo - toma valor en el rectángulo* $[0,1]\times[-1,1]$ *por lo que el espacio cociente será dicho rectángulo relacionando los lados horizontales punto a punto y los verticales punto a punto en sentido opuesto ya que relacionamos* (s,t) *a* $(s-1,-t)$*. Por lo que el espacio de órbitas es la botella de Klein que no es homeomorfa al cilindro porque la botella no es orientable.*

Ahora veremos un resultado de dinámica de acciones sobre espacios compactos.

Definición 2.1. *Un conjunto minimal de una acción* G *en un espacio* X *es un conjunto cerrado, invariante, no vacío y que no contiene propiamente otro conjunto con estas características.*

Lema 2.1. *Si* C *es un conjunto minimal, entonces* $\overline{Gx} = C$ *para todo* $x \in C$ *(la otra implicación también es cierta pero no la necesitaremos)*

Demostración. Si C un conjunto minimal, sea $x \in C$, se tiene que $Gx \subseteq GC = C$ y también $\overline{Gx} \subseteq \overline{C} = C$. Por ser C minimal obtenemos el contenido que falta probando que $\overline{Gx}$ es no vacío, cerrado e invariante. No vacío y cerrado son triviales, para ver que es invariante:

$$g\overline{Gx} = \overline{\overline{gGx}} \supseteq \overline{gGx} = \overline{Gx}$$

y multiplicando por g^{-1} y renombrando g^{-1} por g obtenemos la desigualdad buscada por la *Proposición 1.1.* $\square$

Proposición 2.4. *Toda acción de un grupo* G *en un espacio compacto tiene un conjunto minimal*

Demostración. Vamos a usar el lema de Zorn. Consideremos la familia $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados, no vacíos de X e invariantes bajo la acción de G. Esta familia no es vacía ya que $X \in \mathcal{C}$. Consideremos el orden parcial $(\mathcal{C}, \supseteq)$, sea $\mathcal{C}'$ una cadena totalmente ordenada, es fácil ver que tiene la propiedad de intersección finita ya que de hecho será el conjunto más pequeño de la cantidad finita que se escoja. Por compacidad $\bigcap C_i = C^* \neq \emptyset$ y precisamente C^* va a ser el elemento minimal ya que ser cerrado y ser invariante son propiedades que se conservan por la intersección arbitraria y que al estar ordenado con $\supseteq$ sabemos que no existe otro conjunto cerrado, invariante, no vacío contenido en C^*. □

Teorema 2.1. *Cualquier acción de $\mathbb{Z}$ o de $\mathbb{R}$ en un espacio compacto X tiene un punto recurrente.*

Demostración. Es suficiente probarlo para $G = \mathbb{Z}$ ya que una acción en $\mathbb{R}$ se puede restringir a una en $\mathbb{Z}$. Vamos a ver que todos los puntos de C^* (ver la demostración anterior) son recurrentes. Sea $g : X \to X$ el homeomorfismo que genera la acción, i.e. $g(x) = \theta_1(x)$, tomamos x $\in C^*$ y U entorno de x. Vamos a ver que $\{g^n(U) : n \in \mathbb{Z}\}$ es un recubrimiento abierto de $\overline{\mathbb{Z}x}$. Sea $y \in \overline{\mathbb{Z}x}$, por el lema tenemos que $\overline{\mathbb{Z}x} = \overline{\mathbb{Z}y}$. En particular $x \in \overline{\mathbb{Z}y}$. Por lo que $U \cap \mathbb{Z}y \neq \emptyset$. Sea $g^n(y) \in U \cap \mathbb{Z}$. Entonces $y \in g^{-n}(U)$, quedando demostrado que $\{g^n(U) : n \in \mathbb{Z}\}$ es recubrimiento abierto. Por la compacidad de $\overline{\mathbb{Z}x}$, existe un subrecubrimiento finito $\{g^{n_k}(U) : k = 1, \ldots, m\}$. Sea un entero positivo $\mathcal{N}$, sea $s = \mathcal{N} + max\{n_1, \ldots, n_m\}$, como $g^s(x) \in g^{n_k}(U)$ para algún k, entonces $s - n_k \geq \mathcal{N}$ y $g^{s-n_k}(x) \in U$, por tanto x es un punto recurrente. □

3. Topologías admisibles para el grupo de homeomorfismos de un espacio topológico

Sea A un espacio localmente compacto y Hausdorff. Llamamos H al grupo de homeomorfismos de A con la operación composición. Vamos a definir dos topologías para dicho grupo.

Notación. Para $K, W \subset A$ definimos $(K, W) := \{f \in H : f(K) \subset W\}$.

Definición 3.1. *La topología compacto-abierta de H, que denominaremos τ_k, tiene como subbase los conjuntos de la forma (K, W) dónde K recorre la familia de los compactos de A y W la familia de los abiertos de A.*

Definición 3.2. *La g-topología de H, que denominaremos τ_g, tiene como subbase los conjuntos de la forma (K, W), siendo K cerrado y W abierto con la condición de que K o W^C es compacto.*

(H, τ_g) es un grupo topológico, como veremos más tarde pero en general (H, τ_k) no lo es, pudiendo asegurar solamente que la operación composición es continua respecto de τ_k.

Si el espacio A fuese compacto, como un cerrado en un compacto es compacto ambas topologías coincidirían. En general, en un espacio Hausdorff tendríamos solo que $\tau_k \subseteq \tau_g$ porque los conjuntos compactos son cerrados.

Si A no es compacto, llamamos $A^* = A \cup \{p\}$ a la compactación de Alexandroff y H^* al grupo de homeomorfismos de A^* que dejan fijo al punto p. Claramente hay una correspondencia biunívoca entre los homeomorfismos de H y los de H^*.

Teorema 3.1. *El grupo H de homeomorfismos (con la topología τ_g) de un espacio A localmente compacto y Hausdorff es topológicamente isomorfo al grupo H^*.*

Demostración. Es evidente desde que (H, τ_g) es homeomorfo a (H^*, τ_k) y que τ_g y τ_k coinciden en los compactos. □

Definición 3.3. *Diremos que una topología μ en H es admisible, si la evaluación $F : H \times A \to A$ definida por $F(f, x) := f(x)$ es una función continua tomando en el primer espacio la correspondiente topología producto $\mu \times \tau$.*

La continuidad de *la aplicación evaluación F* en (f, x) siendo $f \in H$ y $x \in A$ es equivalente a decir que dado un entorno W de $f(x)$, podemos encontrar dos entornos V^x y U^f tal que toda función de U^f manda puntos de V^x a W. Es fácil probar que si A es localmente compacto y T_2 y H tiene la topología compacto-abierta, la aplicación F es continua. Sin embargo se puede reforzar dicha afirmación en el siguiente sentido:

Teorema 3.2. *[2, Theorem 2] Si A es un espacio localmente compacto y Hausdorff, entonces la topología compacto-abierta es la topología menos fina admisible.*

En el teorema anterior la compacidad local de A es esencial, como demuestra el siguiente ejemplo que trascribimos de [1].

Ejemplo 3.1. Sea H el grupo de los homeomorfismos de $\mathbb{Q}$. Supongamnos que hubiera una topología admisible en H. Vamos a ver que podemos construir otra topología admisible en H menos fina que la anterior.

Por la definición de topología admisible, si tomamos el punto $0 \in \mathbb{Q}$, el intervalo $(-1,1) \cap \mathbb{Q}$ que claramente contiene al 0 y el homeomorfismo identidad; existen entornos U^{id} y V^0, tal que para todo $h \in U^{id}$ y $x \in V^0$ se tiene $|h(x)| < 1$.

$V^0 = V \cap \mathbb{Q}$ siendo V un abierto de la topología usual en $\mathbb{R}$, tomamos $\phi \in V$ irracional. Construimos una nueva topología definida a partir de los entornos del homeomorfismo identidad; usando como subbase elementos de la forma (F, W), donde F es cerrado y no contiene sucesiones que converjan a ϕ y W es abierto. Esta topología es claramente admisible. Veremos que ninguno de los nuevos abiertos básicos $U^* = (F_1, ..., F_n; W_1, ...W_n)$ está contenido en U^{id}. Para ello, tomamos un intervalo abierto-cerrado que rodee a ϕ y que no corte a $F_1, ..., F_n$. Y ahora cogemos un homeomorfismo h que intercambie este intervalo abierto-cerrado con el entorno correspondiente de $10 + \phi$, pero deje todos los demás puntos fijos. Entonces $h \in U^*$ pero $h \notin U^{id}$.

Observación 3.1. El hecho de que no siempre exista una topología menos fina entre todas aquéllas que hacen continua la aplicación evaluación, hace conveniente la definición de la *estructura de convergencia continua* Λ en $H(X)$ conjunto de homeomorfismos en un espacio topológico cualquiera X, ó bien en otros conjuntos de aplicaciones continuas. Aunque no se denomina de este modo, la noción de estructura de convergencia continua está esbozada en [1], y se ha utilizado fructíferamente en trabajos de otros autores. Por ejemplo, en [4] se caracterizan por medio de Λ, los grupos localmente compactos abelianos en la clase de los grupos reflexivos.

El teorema central de [4] afirma lo siguiente: Un grupo reflexivo G es localmente compacto si y sólo si la evaluación $F : G^\wedge \times G \to \mathbb{T}$ es continua. Aquí $\mathbb{T}$ designa el círculo unidad del plano complejo con su estructura natural de grupo topológico y $G^\wedge$ el grupo de los homomorfismos continuos de G en $\mathbb{T}$ dotado de la correspondiente topología compacto-abierta.

Es decir, aunque el teorema de dualidad de Pontryagin puede extenderse a otras clases de grupos topológicos abelianos, los localmente compactos siguen siendo una clase distinguida. Este hecho ha sido muy celebrado entre los matemáticos que trabajan en el área.

Teorema 3.3. *El grupo de homeomorfismos de un espacio localmente compacto, Hausdorff, con la g-topología es grupo topológico y es la topología admisible menos fina para la que es cierto.*

Demostración. Sea (K, W) un entorno del homeomorfismo h. Esto significa que $h(K) \subseteq W$ o lo que es equivalente $h(K^c) \supseteq W^C$ o $h^{-1}(W^c) \subseteq K^c$, de aquí $h^{-1} \in (W^c, K^c)$. Luego esto demuestra que la inversión es continua ya que transforma abiertos en abiertos.

Sean f, g homeomorfismos y (K, W) un entorno de $h = f \circ g$. Esto significa que $f(g(K)) \subseteq W$, en consecuencia, $g(K) \subseteq f^{-1}(W)$. Para todo $x \in g(K)$, $x \in f-1(W)$ abierto. Por ser localmente compacto existe V^x abierto tal que $x \in V^x \subseteq \overline{V^x} \subseteq f^{-1}(W)$ siendo $\overline{V^x}$ compacto. Luego $\{V^x : x \in g(K)\}$ es un recubrimiento de $g(K)$, por compacidad existe un recubrimiento finito dado por $V^{x_1}, ..., V^{x_n}$ que cumplirá $g(K) \subseteq \cup_{i=1}^n V^{x_i} \subseteq \cup_{i=1}^n \overline{V^{x_i}} \subseteq f^{-1}(W)$ y $\cup_{i=1}^n \overline{V^{x_i}}$ es compacto por ser unión finita de compactos y es cerrado porque el espacio es Hausdorff.
Por tanto $(K, \cup_{i=1}^n V^{x_i})$ y $(\cup_{i=1}^n \overline{V^{x_i}}, W)$ son entornos de g y f respectivamente y la composición de cualquier par de sus funciones manda K a W, queda probado que la composición de funciones es continua.

Supongamos que tenemos otra topología τ para H, la cual es admisible y hace la inversión continua. Sea $U = (K, W)$ un abierto de la g-topología. Si U no es un abierto de la topología compacto-abierta, lo será $U^{-1} = (W^c, K^c)$; de aquí, por el teorema 3.2, U o U^{-1} pertenece a τ, pero como la inversión es continua los dos deben pertenecer. Por tanto la g-topología es menos fina que τ.

$\square$

Observación 3.2. En [3] se da un ejemplo de espacio **métrico** localmente compacto X, tal que la inversión $(f \mapsto f^{-1})$ definida en su grupo de homeomorfismos $H(X)$ no es continua respecto de la topología compacto-abierta. Por tanto, aunque la correspondiente evaluación tal como se define en 3.3 sería continua, $H(X)$ no tiene estructura de grupo topológico. Es un problema abierto caracterizar la clase de los espacios topológicos X tales que $H(X)$ dotado de la topología compacto-abierta es grupo topológico. Teniendo en cuenta el Teorema 3.3 y los comentarios previos al Teorema 3.1, dicha clase contendrá a los espacios compactos de Hausdorff.

Referencias

[1] R. Arens *Topologies for homeomorphism groups.*

American Journal of Mathematics, 593–598 (1946).

[2] R. Arens *A Topology for Spaces of Transformations.*

Annals of Mathematics, Second Series, Vol 47, No 3 480–495 (1946).

[3] J. Dijkstra *On Homeomorphism Groups and the Compact-Open Topology.*

The American Mathematical Monthly, Vol 112, No 10 910–912 (2005).

[4] E. Martín-Peinador, *A reflexive admissible topological group must be locally compact*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 11, 3563–3566.

[5] S. de Neymet *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones.*

Sociedad Matemática Mexicana. (2005).